

小学校算数における最小公倍数の指導法について

— 互いに素でない 2 つの整数の最小公倍数を視覚的に理解させる —

土井 理裕*

Teaching Method of the Least Common Multiple in Elementary School Mathematics :
Visually understand methods of the least common multiple of two integers that
are not relatively prime

Masahiro Doi

要約

小学校第 5 学年の「整数の性質」での「最小公倍数」の学習は、「分数の加法・減法」につながる。しかしながら、「最小公倍数」を素早く適切に求められないことが、「分数の加法・減法」の苦手意識につながっている児童が見られる。特に、2 つの整数の最小公倍数は 2 数の積であると思い込んでしまう児童もいるように思える。そこで、「分数の加法・減法」を学ぶ前に、“数を 2 数の積に分解すること”と“2 数の積をブロックの個数として捉えること”を用いて、互いに素でない 2 つの整数の最小公倍数を視覚的に理解させる方法を考察する。

キーワード：算数，算数教育，指導法，互いに素でない 2 つの整数，最小公倍数，視覚的な理解

Abstract

Learning the “least common multiple” in “the properties of integers” in the fifth grade of elementary school leads to “addition and subtraction of fractions”. However, there are some students who are not good at “addition and subtraction of fractions” because they cannot find the “least common multiple” quickly and appropriately. In particular, some students seem to believe that the least common multiple of two integers is the product of the two numbers. Therefore, teachers must consider how to help students visually understand the least common multiples of two integers that are not relatively prime, by “decomposing a number into the product of the two numbers” and “recognizing the product of the two numbers as the number of blocks”, before learning “addition and subtraction of fractions”.

Keywords: arithmetic, arithmetic education, teaching method, two integers that are not relatively prime, least common multiple, visual comprehension

1. はじめに

1. 1 児童教育コースでの模擬授業において

本学、発達科学部子ども発達学科児童教育コースの授業「特別演習Ⅲ」では、学生が模擬授業に取り組んでいる。ある日の授業で、学生が、問題「 8 m^2 のすな場で、子どもが10人遊んでいます。となりの 6 m^2 のすな場では、子どもが9人遊んでいます。どちらのすな場の方がこんでいるでしょう」を使って、模擬授業を行った。

学生は、「どちらが混んでいると思う」という発問から始め、混み具合をくらべるためには「面積を揃えればいい」あるいは「人数を揃えればいい」ことを導き、さらに、何倍かしても「混み具合が変わらない」ことを押さえた上で、「面積を揃えるにはそれぞれ何倍すればよいか」を児童に考えさせる展開で授業を進めた。そして、「面積は 8 m^2 と 6 m^2 だから、8と6をそれぞれ何倍かして同じ数にすればいいよね」、「そんな数を公倍数と言うよね」、「 $8 \times 6 = 48$ だから、48は8と6の公倍数だよね」、「面積を 48 m^2 に揃えようか」と続けたのである。「整数の性質」で最小公倍数を学習しているので、「公倍数と言うよね」に続けて、「でも、公倍数はいっぱいあるし、数が大きくなると計算が大変だから最小公倍数がいいよね」、「8と6の最小公倍数はいくら」と授業を進めるものと思い込んでいたので、面食らった。

1. 2 「学校支援ボランティア」としての実感

模擬授業後の質疑応答の際に、授業を行った学生に2つの面積を8と6の最小公倍数に揃えなかった理由をたずねてみると、「8と6の最小公倍数24に揃えるのが正解であることはわかっていたが、8と6の最小公倍数が24であることに戸惑いを感じる児童は少なくなく、また、8と6の倍数をそれぞれ書き出していくと時間がかかり、そうすると面積を揃えることに集中できなくなると思ったので」とのことであった。さらにそう思った理由をたずねると、「2年次から“学校支援ボランティア”として、週1回、出身小学校を訪問している。児童と比較的年齢の近い存在として、授業に参加したり、児童と触れ合ったりして、学習指導の補助や学校生活への適応補助などに取り組み、また、3年次には同じ小学校で教育実習も行った。そのような小学校での活動の中で、気づいたことだが、「倍数と約数」の学習において、2つの数を示して「最大公約数や最小公倍数はいくら」と聞くと、最大公約数については、約数を見落としてしまい間違える児童がいるが、最小公倍数については、単純にそれぞれの数の倍数を書き並べればよいので間違える児童は少ない。ところが、「分母の加法・減法」の演習において、通分するために「4と6の最小公倍数はいくら」と聞くと、4と6のそれぞれの倍数を書き出して見つけるのではなく、「 $4 \times 6 = 24$ 」と即答する児童が出てくる。 $1/3$ と $1/5$ を通分する際のように、分母を2つの分母の積に揃える場面が多いため、「2つの数の最小公倍数は2数の積である」と混乱している児童が多いのでは感じている」と答えた。

2 中学校や高等学校での最小公倍数、最大公約数の取扱いについて

2. 1 高等学校の数学教員としての最小公倍数，最大公約数の指導

高等学校の数学科教員として，36 年間，教壇に立ってきた。高等学校学習指導要領の変化に伴い，学習内容は目まぐるしく変化した，どの時代にも，「整数の性質」について学ぶ単元があった。そこでは，「約数と倍数」や「最大公約数と最小公倍数」が取り扱われており，「2 つの整数 a ， b について，ある整数 k を用いて， $a = b k$ と表されるとき， b を a の約数であるといい， a を b の倍数であるという」，「2 以上の自然数で，正の約数が 1 とその数自身のみである数を素数という」，「自然数を素数だけの積の形に表すことを素因数分解という」などの定義に続き，素因数分解を利用した最大公約数や最小公倍数の求め方が紹介されていた。また，私の中学時代には，1 年次の「整数の性質」の単元において，「素数・素因数分解」に続き，「最大公約数」，「最小公倍数」が取り扱われていた。当時の教科書を見ると，「最大公約数」については， $60 = 2^2 \times 3 \times 5$ ， $72 = 2^3 \times 3^2$ と素因数分解できることを示した上で，「共通な素因数は，2 が 2 つと，3 が 1 つである。これらからいくつかとって積をつくると，1 以外の公約数が得られる。最大公約数は，これらを全部かけあわせた積 $2 \times 2 \times 3 = 12$ である」と説明されており，さらに，「最大公約数を求める計算は，次のようにすると便利である」と，「連除法」や「はしご算」などと呼ばれる方法

$$\begin{array}{rcl}
 60 = 2^2 \times 3 \times 5 & = & \boxed{2} \times \boxed{2} \times \boxed{3} \times 5 \\
 72 = 2^3 \times 3^2 & = & \boxed{2} \times \boxed{2} \times 2 \times \boxed{3} \times 3 \\
 \hline
 60 \text{ と } 72 \text{ の最大公約数} & \cdots & 2 \times 2 \times 3
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 2 \overline{) 60 \ 72} \\
 \underline{2 \overline{) 30 \ 36}} \\
 3 \overline{) 15 \ 12} \\
 \underline{ 5 \ 4}
 \end{array}$$

図1 最大公約数についての記載

(以下「連除法」とする)が紹介されている(図1)。

また，「最小公倍数」については，「24 と 30 の最小公倍数は，図のように，全部の素因数 2，3，5 について，その累乗の指数の最大なもの， 2^3 ，3，5 をとって，その積をつくればよい。したがって，24 と 30 の最小

$$\begin{array}{rcl}
 24 & = & \boxed{2^3} \times \boxed{3} \\
 30 & = & \boxed{2} \times \boxed{3} \times \boxed{5} \\
 \hline
 24 \text{ と } 30 \text{ の最小公倍数} & \cdots & 2^3 \times 3 \times 5
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 2 \overline{) 24 \ 30} \\
 3 \overline{) 12 \ 15} \\
 \underline{ 4 \ 5}
 \end{array}$$

図2 最小公倍数についての記載

公倍数は， $2^3 \times 3 \times 5 = 120$ である」と説明されている。また，「最大公約数を求める計算は，次のようにすると便利である」と「連除法」が紹介されている。ただし，24 と 30 の最小公倍数を求める計算は， $2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$ となっている(図2)。

そのため，不勉強の誹りを免れないことであるが，素因数分解を利用した最小公倍数や最大公約数の求め方や連除法などを既に学んでいるものと思い込んでおり，授業においては中学での学習の復習および発展という感覚で指導にあたっていた。

2. 2 中学校における最小公倍数，最大公約数の取り扱い

現行の教科書では，「整数の性質」の単元において，「素数・素因数分解」は取り扱われているが，「最大公約数」，「最小公倍数」は取り扱われていない。「中学校学習指導要領(平成 29 年告示)解説 数学編」では，「小学校算数科における取扱い」において，「第 5 学

年では、記数法の考えを通して整数及び小数についての理解を深めることや、偶数、奇数、約数、最大公約数、倍数、最小公倍数について学習している」ことを踏まえた上で、「中学校数学科における取扱い」において、「第1学年では、数の範囲を拡張し、数の性質や計算について考察する力を養っていく」、「また、これに関連して、自然数を素数の積として表すことを取り扱う」と述べられている。そして、「自然数を素数の積として表すこと（[内容の取扱い]（1））」においては、自然数を素数の積として表すことにより、「小学校算数科で学んできた整数の性質についての理解を深め、中学校での学習につなげることができる」とあり、さらに、「算数で学習した約数、倍数などの整数の性質について捉え直すことができるようにする」と述べられている。[1]

しかしながら、第1学年においては、素因数分解ができるように指導することに留まり、約数、最大公約数、倍数、最小公倍数には触れてはいない。素因数分解は、第3学年における、「数の平方根を含む式の計算」において、根号の中をできるだけ小さい自然数にする方法に利用される程度である。

2. 3 高等学校での最小公倍数、最大公約数の指導

高等学校における最大公約数や最小公倍数の学習は、生徒にとって、小学校以来の学習となり、2つの数の約数や倍数をそれぞれ書き出して求める具体的な方法の復習から始まり、約数や倍数の意味を確認した上で、素因数分解を利用した最大公約数や最小公倍数の求め方を理解し習熟するという流れになる。そして、4と6の最大公約数が12になることの理由を5年の時間を経て知ることになる。

3 小学校での「倍数と約数」の取り扱いについて

3. 1 小学校学習指導要領より

「倍数と約数」の取扱いについて、「小学校学習指導要領（平成29年告示）」では、第5学年の「A（1）整数の性質」において、「約数、倍数について知ること」については「最大公約数や最小公倍数を形式的に求めることに偏ることなく、具体的な場面に即して取り扱うものとする」と記されている。[2]

また、「小学校学習指導要領（平成29年告示）解説 算数編」では、「ここで育成される資質・能力は、同じ大きさを表す分数を調べたり、約分や通分をしたりする際に用いるだけでなく、第6学年での等しい比、中学校第1学年「A数と式」における自然数を素数の積に表すこと、第3学年の式の展開や因数分解の基礎となる内容である」、さらに「最大公約数や最小公倍数の取扱い」については、「具体的な場面に即して指導し、特に意味の理解を図るようにすることが大切である。」と解説されている。[3]

3. 2 具体的な場面に即して最小公倍数を求めることについて

4と6の公倍数の求め方については、次の（1）～（4）の方法が紹介されている教科書が多い。

(1) 0, 1, 2, …と整数が並ぶ2つの数直線において、それぞれ4の倍数と6の倍数に○印等をつける。2つの数直線上で共通な数を求める。

(2) 4と6の倍数をそれぞれ書き、その中から共通な数を求める。

4の倍数 4, 8, 12, 16, 20, 24, …
6の倍数 6, 12, 18, 24, 30, 36, …

(3) 4の倍数を書き、その中で、6の倍数になっている数を見つける。

4の倍数 4, 8, 12, 16, 20, 24, …
6の倍数かどうか × × ○ × × ○

(4) 6の倍数を書き、その中で、4の倍数になっている数を見つける。

6の倍数 6, 12, 18, 24, 30, 36, …
4の倍数かどうか × ○ × ○ × ○

4と6の最小公倍数については、単独で求めさせる問いは少なく、4と6の公倍数は12, 24, 36, …と求めた上で、公倍数のうちで一番小さい数12を答えさせる、という問いが多くみられる。なお、(1)～(4)の方法を比べて、4と6の公倍数を求める方法としては、(1), (2)のように、2つの数の倍数を書き出すことが基本であるが、2つの数のうち大きい方の数の倍数を書き出して、その中からもう一つの数の倍数になっている数を求める方法(4)が一番簡単であることを指導するように導かれている。4と6の最小公倍数が、24ではなく12であることの説明については、特に説明されておらず、「4と6の公倍数をみつける」際に、「 4×6 だから、24は公倍数です」、「24は4と6の最小公倍数かな」とヒントを出している教科書がある程度である。

4 小学校や中学校で「連除法を指導しない」ことについて

中学校の数学科教員に「連除法を指導しないこと」についてたずねてみると、「中学でも連除法は教えていない。以前であれば、素因数分解に続いて、約数や倍数を指導していたので、そこで連除法も取り扱っていた。ところが、今は、教科書で約数や倍数を取り扱っていないので、連除法は教える機会がない」とのことであった。ただし、「分数の加法・減法の際に、とにかく通分に時間がかかってしまうし、また、2つの数の最小公倍数は2数の積であると思い込んでいる生徒もあり、数が大きくなるために間違ってしまったし、約分を忘れたりすることが多いので、最小公倍数の求め方として連除法を教えている教員もいる」とのことであった。

小学校の教員に「連除法を指導しないこと」についてたずねてみると、「学習塾などで、連除法を用いた2つの数の最大公約数や最小公倍数の求め方を学んで知る児童もいる。しかしながら、その方法を用いて最大公約数や最小公倍数は求めることはできても、その方法で求められる理由は理解できておらず、また、最小公倍数や最大公約数の意味を十分に理解できていない児童もみられる」、「また、連除法を理解させるためには、素因数分解を用いた最小公倍数や最大公約数の求め方を理解させる必要がでてくるため手を出すことができない」とのことであった。また、「児童の指導においては、最大公約数、最小公倍数を

求められることは大切なことだが、倍数や約数の意味を理解させた上で、公倍数の中の最小の数を最小公倍数という、公約数の中の最大の数を最大公約数ということをしちんと理解させることがまず必要であると考えている。そのため、連除法などの解法は知っている
と便利ではあると思うが、教えていない」とのことであった。

5 約数と倍数の学習の必要性

5. 1 約数と倍数の活用

小学校第5学年前半で学ぶ「約数、倍数」は、現行では、以下のような学習につながっていく（図3）。その中でも、特に、最大公約数や最小公倍数を正しく理解し、正確に素早く求められることは、小学校第5学年でその後に学ぶ「分数の意味と表し方」や「分数の加法、減法」の学習を学ぶ上で大切な要因となってくると思われる。実際、宮城（2020）は、5年生を対象とした「分数のたし算とひき算」の授業実践において、「算数における論理的思考力」を育むため、児童の考えを軸にした授業展開などを行ったところ、「教師主導ではなく、児童の考えをつなぐことを意識したことで児童目線での授業実践ができたのではないかと考える。」などの成果に続いて、「通分や約分の定着（公倍数や公約数がすぐに出てこないために時間がかかる。）」を課題としてあげている。[4]

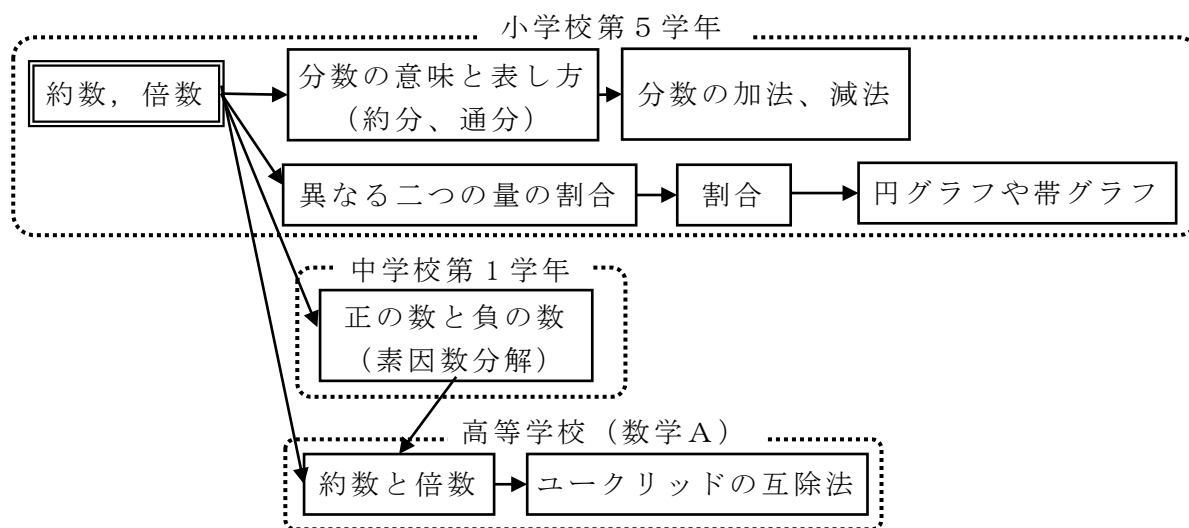


図3 約数、倍数の活用

5. 2 「分数の加法・減法」への苦手意識

来春より小学校の教壇に立つことになっている学生から、学校支援ボランティアなどでの実感を聞く中で、「分数の加法、減法」についての話が出てきた。学生たちの話を要約すると、「分数の足し算になると、まず、分数の分母と分子にそれぞれ同じ数をかけて分母を揃える（通分）。その上で分子を足して一つの分数にまとめる（分子の足し算）。そして、約分できる場合はもうこれ以上約分できなくなるまで約分する（必要に応じて約分）」という複雑な手順の途中で手を止めたり間違えたりする児童が多く、最小公倍数や最大公約数を求める場合よりはるかに苦手意識が強い」、「2つの分数のたし算では、2つの分母を揃えればよいことを理解している児童は多いと思う。ただし、公約数や公倍数はあまり意識

していないようで、約分は“分母，分子をともに割ることのできる数”で分母，分子を割ればよい，通分は“それぞれの分母を掛け合わせた数”に揃えればよい，と捉えている児童が多いように思う」，「実際， $12/30=6/15=2/5$ などの約分は多くの児童ができるが，分数のたし算になると，約分より難易度がぐっと上がり， $1/2+1/3=(1\times3)/(2\times3)+(1\times2)/(3\times2)=3/6+2/6=5/6$ と計算ができる児童は半数程度になるかと思う。また， $1/4+1/6$ については，4と6の最小公倍数が24ではなく12であることに気づかずに，分母を $4\times6=24$ に揃えて $10/24$ と計算した後，約分して $5/12$ とする児童が多い。ただし，通分して分子をたし算するという複雑な計算を終えて気が緩むのか $10/24$ の約分を忘れている場合が多く，正答率は $1/2+1/3$ の計算よりぐっとさがる。さらに，模範解答では，分母を12に揃えることが示されているが，2つの数の最小公倍数は2数の積であるという思い込みが混乱を招き，苦手意識をさらに助長しているように思える」という実感であった。

5. 3 互いに素でない2つの数の最小公倍数の指導の必要性

中村（2008）は，学習展開の中に「認知的なずれ」をどのように組み込むことが学習規範の形成に有用であるかを考察し「学習規範の形成を促す学習展開」を考案している。その中で，問題「4と6の公倍数を小さい方から3つ求めよう」に対して，

(1)意味も手続きも不足していて自力解決が不可能な状態

(2)意味を十分考慮しないで，手続きを適用した矛盾のある解決

- ・3と5の公倍数は， $(3\times5=)15$ の倍数であることから，4と6の公倍数は， $(4\times6=)24$ の倍数である。だから24, 48, 72。

(3)手続きを適用したが，意味解釈において不安を感じている解決

- ・3と5の公倍数は， $(3\times5=)15$ の倍数であることから，4と6の公倍数は， $(4\times6=)24$ の倍数である。だから24, 48, 72と考えたが，最小公倍数が12であることから，12, 24, 36ではないかと迷う。

(4)意味を考慮しているが，手続きに習熟していないため，混迷している解決

- ・最小公倍数12がわかり，それを2倍，3倍して，24, 36を出す。3と5の公倍数は，15の倍数であることから，4と6の公倍数は，24の倍数と考えると，48, 72となる。手続きについて迷う。

(5)既習の適切な意味に照らして，手続きを適用した矛盾がない解決

- ・4の倍数と6の倍数をかき，共通項を見つける。4の倍数をいくつか出した後6で割れるものを見つける。6の倍数をいくつか出した後4で割れるものを見つける。上のやり方で最小公倍数12を見つけ，それを2倍，3倍にする。

などの児童の反応類型を考えて授業実践に取り組んだところ，(3)，(4)に該当する表現が表出したことを記している。互いに素でない2つの数の最小公倍数を求める際の児童の混乱ぶりが見て取れる。[5]

5. 4 素因数分解等を用いた最小公倍数の求め方の指導について

菊池(2005)は、「小学校の算数は、中学校の数学への単なる準備教育ではない。しかし、小学校としての独自性を発揮しながらも、中学・高校へと学習を継続・発展させる数学教育の一環でもある。それにも関わらず、小学校の算数に見られる現況は、むしろ、中学・高校へと発展する数学教育と隔絶した異質な教育観に支配されているように思われる。」と述べた後、「例えば、約数・倍数→公約数・最大公約数→公倍数・最小公倍数という展開があってもよい。というのは、子ども達にとって倍数よりも約数の方が与し易い。(中略)その上、最小公倍数を算出するのに、最大公約数を活用すれば容易に求められる利点もある。」と続けている。さらに「「偏ること」がない限り、然るべき計算法があってもよいはずである。しかし、実態は計算法を排除した具体ベッタリだけの展開である。その結果、分数の通分に至っても、最小公倍数を積極的に活用させる指導は何もない。」と続き、そして、「“分数ができない大学生”もこうして育ったのだろうか。計算法は正しく指導すべきである。それには、子ども達を混乱させるハシゴ式計算法でなく、素因数の共通・合併による計算法が優れている。そもそも小学校高学年になっても素因数分解を排除している指導要領こそが問題なのである。」と述べている。[6]

6 互いに素でない2つの数の最小公倍数の指導について

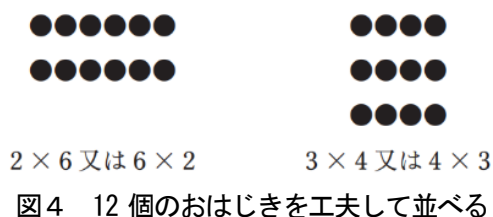
6. 1 「できない」ではなく「何ができるか」、「どうすればできるか」

2つの数の最小公倍数を求めるにあたり、具体的に2つの数の倍数を書き出して求める方法ではなく、素因数分解を用いて求める方法を指導することは、現行の小学校算数では「できない」ことであり、高等学校での学習を待たなければならないのが現状である。

しかしながら、小学校算数においても、互いに素でない2つの数の最小公倍数を用いる機会がある以上、素因数分解まで触れなくても、小学校算数で「できる」範囲で計算を用いて求める方法を指導することは、児童の躓きの多い分数の加法・減法における苦手意識を払拭するだけでなく、計算をスピーディに行えるようになることで、算数・数学への自信につながるのではと考える。その実現のために、小学校算数において、「何ができるか」、「どうすればできるか」を考察する必要があると考える。

6. 2 数を2数の積に分解することについて

整数を素因数の積に分解することは中学で学習することであるが、「小学校学習指導要領(平成29年告示)解説 算数編」には、第2学年内容の「A数と計算」において、「(エ)一つの数をほかの数の積としてみるなど、ほかの数と関係付けてみること。」において、「ある部分の大きさを基にして、その幾つ分として、全体の大きさを捉えることができるようにする。」と記されている。「12個のおはじきを工夫して並べる」という活動により、図4のようにいろいろな並べ方ができ、 2×6 、 6×2 、 3×4 、 4×3 などのような式で表すことができることが例示されている。そして、「このように、



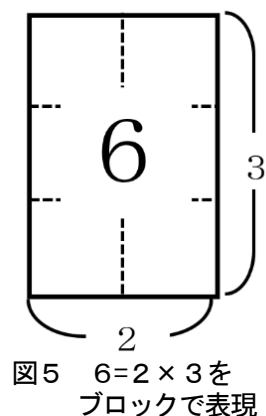
一つの数をほかの数の積としてみることをできるようにし、数についての理解を深めるとともに、数についての感覚を豊かにする。」と記されている。[3]

また、田村（2018）は、「異分母分数の加減において、通分の場合も、機械的に公倍数を求めたりするのではなく、分母を2数の積に分解する感覚が大切になる。（中略）1つの数を2つの数の積でとらえる指導は、第2学年の乗法で行われる。（中略）この学習が最小公倍数、最大公約数、通分へとつながっている。」と述べている。[7]

6. 3 2数の積を視覚的に表すことについて

小学校算数においては、数を視覚的・直観的に理解するために数直線が早くから用いられている。数は数直線上の点で表され、児童は、数の大小、順序などを点の位置の左右によって直観的に捉えるようになり、整数を数直線上に等間隔に並ぶものとして視覚的に認識するようになる。第4学年では面積を取り扱うようになり、児童は「たて15cm、横10cmの長方形のはがきの面積は $15 \times 10 = 150(\text{cm}^2)$ である」のように、2数の積で面積を求められるようになる。面積を学習した後であれば、児童に「 4 m^2 のすなば」や「 6 m^2 のすなば」をイメージさせるために「たて2m、横2mの正方形」や「たて3m、横2mの長方形」を用いることに違和感はなく、この長方形と正方形の広さの違いから、視覚的に4と6の大小関係も理解できると思われる。しかしながら、「 $6 = 2 \times 3$ 」を示して「6は、たて3、横2の長方形の面積」として視覚的にとらえさせようとする、小学校算数では、図形を表す際には長さの単位を用いることが一般的なので、「面積 6 m^2 は、たて3m、横2mの長方形の面積で表せる」との説明せざるを得ないため、m、 m^2 の単位の違いには児童が混乱してしまうと思われる。

ここで、面積の導入段階では「長方形の面積は、1辺の長さが1cmの正方形が何個分あるかで表すことができる」などとされていることを考慮すると、正方形のブロック6個を、たて3個、横2個に並べた図形を用いることで、「 $6 = 2 \times 3$ 」を「正方形のブロックの個数」として視覚的に捉えさせることができるのではと考えた（図5）。



7 研究目的と先行研究

7. 1 研究目的

本研究では、小学校第5学年の「整数の性質」において、児童に、「素因数分解」や「連除法」に触れることなく、以下の①～③を理解させ、

- ①互いに素でない2つの整数A、Bについて、最大公約数Gとするとき、 $A = a \times G$ 、 $B = b \times G$ （a、bの最大公約数は1）と2つの整数の積で表される。
- ②①のとき、2つの整数A、Bの最小公倍数Lは $L = a \times b \times G$ となる。
- ③最大公約数が1である2つの数については、最小公倍数は2数の積である。

児童が、互いに素でない2つの数の最小公倍数について理解を深め、最小公倍数を正確に素早く求められるようになるための指導法を考察し、提案することを目的とする。

なお、指導においては、「数を2数の積に分解すること」と「2数の積をブロックの個数として視覚的に捉えること」を用いることとする。また、指導にあたる教員が、中学校第1学年で学ぶ「素因数分解」や、高等学校で学ぶ「素因数分解を用いた最大公約数、最小公倍数の求め方」を理解していることを前提とする。

7. 2 先行研究

調べた範囲では、「数を2数の積に分解すること」と「2数の積をブロックの個数として視覚的に捉えること」を用いた最小公倍数の指導法については先行研究を見つけることはできなかった。

8 授業方針と授業計画

8. 1 授業方針

授業においては、次の(1)～(8)の方針で行う。ただし、2つの整数A、Bの最大公約数をG($\neq 1$)に対して、 $A = a \times G$ 、 $B = b \times G$ (a、bの最大公約数は1)と表されるものとする。また、A、B、G、a、bなどの文字は用いないものとする。

- (1) 2つの数に対して、最小公倍数が2つの数の積にならない場合、2つの数には、「2つの数を割り切れる数が1以外にある」ことを理解させる。ただし、授業においては、児童の混乱を防ぐために「2つの数を割り切れる数がある」という言葉を用いる。最後に、その割り切れる数が最大公約数であることを補足する。
- (2) (1)の「割り切れる数」を用いて、それぞれの数が2数の積に分解できることを理解させる。
- (3) (2)の2数の積への分解を用いて、ブロックを、横の個数が最大公約数G、たての個数がそれぞれa、bの正方形あるいは長方形の形状に並べ、2つの数A、Bをブロックの個数として認識させる。
- (4) それぞれの数をk倍した倍数は、正方形あるいは長方形をk個積み重ねた図形を考えれば、同様にブロックの個数で表されることを理解させる。
- (5) 最小公倍数を求めるには、正方形あるいは長方形をそれぞれ積み重ねた図形のたての個数をそろえればよいことを理解させる。
- (6) 2つの図形のたての個数は $a \times b$ 個に揃えればよいことを理解させる。
- (7) 2つの数A、Bの最小公倍数は $a \times b \times G$ となることを理解させる。
- (8) 「2つの数を割り切れる数がない」ときは、2つの数A、Bの最小公倍数は $A \times B$ でよいことを理解させる。

8. 2 授業計画

8. 2. 1 学習指導案

学習活動・内容 ○予想される児童の反応	指導上の留意点
<div data-bbox="164 215 233 248" style="border: 1px solid black; padding: 2px;">導入</div> <ul style="list-style-type: none"> ・ 3 と 5 の最小公倍数を求める。 ・ 4 と 6 の最小公倍数を求める。 	<ul style="list-style-type: none"> ・ 2 つの方法を確認する。 <ul style="list-style-type: none"> ①それぞれの倍数を書き出す方法 ②大きい数の倍数を書き出して、小さい数の倍数かを確認する方法 ・ $(4 \times 6 =) 24$ ではなく、12 であることを確認する
<div data-bbox="164 528 264 562" style="border: 1px solid black; padding: 2px;">めあて</div> <div data-bbox="295 528 710 562" style="border: 1px solid black; padding: 2px;">最小公倍数の求め方を極める</div> <div data-bbox="295 577 1287 611" style="border: 1px solid black; padding: 2px;">2 つの数をかけ合わせた数が最小公倍数にならないのはどんなとき？</div>	<ul style="list-style-type: none"> ・ 6 と 9 の最小公倍数を確認する。
<ul style="list-style-type: none"> ○ 偶数と偶数 ○ 3 の倍数と 3 の倍数 ○ 2 つの数を割り切れる数があるとき 	<ul style="list-style-type: none"> ・ 自由に発言させる。 ・ 4 と 6 は 2 で、6 と 9 は 3 で割り切れることを確認する。
<div data-bbox="504 792 1062 826" style="border: 1px solid black; padding: 2px; text-align: center;">4 と 6 の最小公倍数について考えよう。</div> <ul style="list-style-type: none"> ・ 4 と 6 の最小公倍数について考える。 	
<div data-bbox="311 898 1270 931" style="border: 1px solid black; padding: 2px; text-align: center;">2 つの数を割り切れる数があるとき、2 つの数は分解できるよね？</div> <ul style="list-style-type: none"> ○ $4 = 2 \times 2$, $6 = 2 \times 3$ 	<ul style="list-style-type: none"> ・ 九九でやったことを確認する。
<div data-bbox="595 996 999 1030" style="border: 1px solid black; padding: 2px; text-align: center;">ブロックの個数で考えよう。</div>	
<ul style="list-style-type: none"> ・ 4 個と 6 個のブロックをそれぞれ並べて 2 つの四角形を作る。 	<ul style="list-style-type: none"> ・ 横が 2 個の四角形を示す。 ・ 「4 の正方形」, 「6 の長方形」と名付ける。
<div data-bbox="416 1158 1163 1191" style="border: 1px solid black; padding: 2px; text-align: center;">「4 の正方形」を 2 つ積み重ねると 8 個になるよね。</div>	
	<ul style="list-style-type: none"> ・ 「4 の正方形」を 2 つ積み重ねた図をかく。
<div data-bbox="212 1319 1394 1352" style="border: 1px solid black; padding: 2px; text-align: center;">「4 の正方形」と「6 の長方形」、それぞれ何個ずつ積み重ねると同じ個数になる？</div>	
<ul style="list-style-type: none"> ○ 「4 の正方形」を 3 個, 「6 の長方形」を 2 個。 	<ul style="list-style-type: none"> ・ 「4 の正方形」を 3 個, 「6 の長方形」を 2 個, 積み重ねた図をかく。
<div data-bbox="344 1467 1235 1500" style="border: 1px solid black; padding: 2px; text-align: center;">4 と 6 の最小公倍数は $4 \times 3 = 6 \times 2 = 12$ ということだよね。</div>	
<div data-bbox="330 1529 1246 1563" style="border: 1px solid black; padding: 2px; text-align: center;">この図を見て、4 と 6 の公倍数が 12 になる理由を説明できる？</div>	
<ul style="list-style-type: none"> ○ 横の個数が同じなので、たての個数を揃えればよい。 	<ul style="list-style-type: none"> ・ 自由に発言させる。
<ul style="list-style-type: none"> ○ たての個数は 2 と 3 なので、$2 \times 3 = 6$ に揃えればよい。個数で考えるのだから、最小公倍数は、$2 \times 6 = 12$ になる。 	<ul style="list-style-type: none"> ・ 図で確認する。
<div data-bbox="295 1832 1283 1865" style="border: 1px solid black; padding: 2px; text-align: center;">$4 = 2 \times 2$、$6 = 2 \times 3$ と分解できる場合、最小公倍数はどうなる？</div>	
<ul style="list-style-type: none"> ○ 2 が共通であり、それ以外の数 2 と 3 をかけると 6 になるので、最小公倍数は $2 \times 6 = 12$ となる。 	<ul style="list-style-type: none"> ・ ヒントを出す。 ・ 最小公倍数は $2 \times 2 \times 3$ となっていることを確認する。

<p>まとめ</p> <ul style="list-style-type: none"> ・ 2つの数を割り切れる数を調べればよい。 ・ 割り切れる数があるとき、最小公倍数は、2つの数を分解して、共通な数に、それ以外の数をかけ合わせればよい。 ・ 2つの数を割り切れる数がないとき、最小公倍数は2つの数をかけ合わせればよい。 	<ul style="list-style-type: none"> ・ $6 = 2 \times 3$, $9 = 3 \times 3$ と分解できることより、6と9の最小公倍数は、$3 \times 2 \times 3 = 18$であることを確認する。 ・ 割り切れる数は1以外であり、最大公約数であることを確認する。
---	--

8. 2. 2 板書計画

・ 3と5の最小公倍数を求めよう。

3の倍数 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, ...

5の倍数 5, 10, 15, 20, 25, 30, ...

5の倍数 5, 10, 15, 20, 25, 30, ...

3の倍数 × × ○

3と5の最小公倍数は、15 3×5

・ 4と6の最小公倍数を求めよう。

6の倍数 6, 12, 18, 24, ...

4の倍数 × ○

4と6の最小公倍数は、12

2つの数の積にならない!

6と9の最小公倍数は、18

④ 最小公倍数の求め方を極める

最小公倍数が2つの数の積にならないのは?

偶数と偶数 ... 3と9は?

割り切れる数がある

→ 4と6は2で、6と9は3で、割り切れる

4と6の最小公倍数を求めよう!

2で割り切れる $4 = 2 \times 2$ と分解できる

$6 = 2 \times 3$

ブロックの個数で考えると

「4の正方形」

「4の正方形」の2つつ

何個ずつ積み重ねると同じ個数になる?

$4 \times 3 = 6 \times 2 = 12$

4と6の最小公倍数は12

横の個数が同じなので、たての個数をそろえる。

たての個数は2と3なので、 $2 \times 3 = 6$ (個)にする

$4 = 2 \times 2$

$6 = 2 \times 3$

横 たて $2 \times 3 = 6$

2が共通で、残りの数かけて6

最小公倍数は $2 \times 6 = 12$

最大公約数

まとめ 2つの数を割り切れる数を調べる (1以外)

「ない」 ⇒ 2つの数の積

「ある」 ⇒ (割り切れる数) × ○ と分解して、(割り切れる数) × △ (割り切れる数) × ○ × △

9 来春より小学校の教壇に立つことになっている学生の感想等

来春より小学校の教壇に立つことになっている学生に、学習指導案や板書計画を見せたところ、「最大公約数を横の個数とした長方形等を用いると、たての個数に高さに互いに素な2つの数が出てくるので、たての個数を揃えるには2数の積を用いればよいことが、視覚的に理解できるのでわかりやすいのでは」との感想があった。しかしながら、実際の指導案で授業するとなると、「時間がかかってしまう」、「数を個数で捉えることに戸惑う児童も出てくる」、「具体的に数を書き出して求めるものと思っている児童にとっては、かえって混乱させてしまうのでは」などの声もあった。最後に「最小公倍数を正確に素早く求められる指導が必要であることは十分理解しているので、小学校の現場で目の前の児童の実態に即して、よい指導方法を工夫していきたい」とのことであった。

10 おわりに

学校支援ボランティアや教育実習で、実際に小学生の指導にあたった大学4年生の実感から、「倍数や約数」についての小学校、中学校、高等学校での指導の現状を調べ、分数の加法・減法の指導に役立つように、また、中学校や高等学校での学習につながるようにと今回の指導法を考察してみた。特に、「割合」の学習での模擬授業において、広さや人数の異なる部屋における混み具合を考察する際に取り扱われていた「部屋の面積をそろえて比べる」という方法にインスピレーションをうけて、「数」を「ブロックの個数」として捉えることで、互いに素でない2つの整数の最小公倍数の求め方を視覚的に理解させる指導法を考察したが、実際に小学生に授業で指導する機会を設けることができず、また、小学校の教員から指導いただく機会も持てなかったため、この指導法は「机上の空論」あるいは「絵に描いた餅」であるのかも知れない。今後は、今回は検討できなかったが、「 $4 = 2 \times 2$ 、 $6 = 2 \times 3$ 」を用いて、4の倍数は $2 \times 2 \times \square$ 、6の倍数は $2 \times 3 \times \bigcirc$ と表せることを示し、 \bigcirc と \square に当てはまる数を考えさせる」指導法や、「4と6の倍数を書き出したときに、4と6の公倍数は、4の倍数の中に3つごとに現れ、6の倍数の中に2つごとに現れていることを利用して、数「2」と「3」を強調するとともに、4と6の最大公約数である「2」が関係していることに気付かせる」指導法なども含めて、小学校の教員との研究協議の場を設けるなどして、現場の教員の声を参考に指導法を引き続き研究していきたい。また、分数の加法・減法における通分を視覚的に理解させる指導法についての研究にも取り組んでいきたい。

引用文献

- [1] 文部科学省(2017). 中学校学習指導要領(平成29年告示)解説 数学編
- [2] 文部科学省(2017). 小学校学習指導要領(平成29年告示)
- [3] 文部科学省(2017). 小学校学習指導要領(平成29年告示)解説 算数編
- [4] 宮城隆二(2020). 論理的思考力を高める算数授業の実践:言葉とイメージをつなぐ手立てや教材の工夫を通して. 琉球大学大学院教育学研究科高度教職実践専攻年次報告書, 4, 29-32
- [5] 中村啓(2008). 確かな学力を育む算数学習:学習規範を形成することを目指した取り組み. 日本数学教育学会誌, 90(10), 32-39. https://doi.org/10.32296/jjsme.90.10_32
- [6] 菊池乙夫(2005). 小学校算数における科学的数学教育再編のために. 数学教育学会誌, 46(1-2), 23-34. https://doi.org/10.34323/mesj.46.1-2_23
- [7] 田村壽(2018). 高校入試問題と小学校算数科の内容の関わり:根号を含む数の計算と単位の考え, 数についての感覚との関わりについて. 樟蔭教職研究, 2, 27-34