高松大学紀要，41．1～10

不完備市場における課税均衡の存在：公共財供給のケース

清　水　　一

Incomplete market, Capital income tax and Public good

Hajime Shimizu

Abstract

We have incorporated capital income tax and public good into the standard General Equilibrium model with incomplete market so as to make a new model, and prove the existence of equilibrium of the model.

Key Words: incomplete market 不完備市場，capital income tax 資本所得税，public good 公共財．

1　はじめに

不完備市場モデルは，Arrow(1964) による証券市場の一般均衡モデルの一般化として発展してきた。このモデルは，ポートフォリオ選択や資産価格理論，資本構成問題にも応用され，ファイナンス研究者にとって重要なものとなっている[1]。

不完備市場モデルに資本所得税を導入し，そのモデルに均衡が存在することが，清水 (2002) によって証明された。そこでは，税収は各個人に一括移転で配分される状況を考えた[2]。しかし，せっかく徴収した税収を一括移転するような状況は，政府の行動としては不十分であり，租税の意義についても納得のいく状況とは考えにくい。そこで，本稿では政府がより積極的な活動を行う状況として，税収によって公共財を供給するモデルを考え，その均衡の存在を証明した。

本稿で考察する公共財は「等量消費」の性質を満たす純粋公共財である。「等量消費」とは，公共財の総供給量を全ての個人が消費できることである。この概念は，サミュエルソンによるもので，私的財と公共財の本質的な差異を明確に表現するためのものであり，もちろんすべての公共財がこのような性質を持つとは限らない。しかし，このような特徴づ

[1]例えば，Duffie(1991,1996),Geanakoplos(1990),Demarzo(1988) Magill and Quinzii(1996) などを見よ

[2]不完備市場に資本所得税を導入する意義については，清水 (2002) を参照されたし。

けによって公共財を純粋理論の枠内で分析できるようになった。本稿はモデルの理論的な面に興味を集中するため,「等量消費」をみたす純粋公共財を導入している。

本稿の想定する経済は以下のようなものである。期首・期末（来期の期首）を視野に入れる1期間のモデルを考え，不確実性を期末に起こる自然の状態によって表す。つまり，アロー・デブルー流の状態選好アプローチを採用する[3]。この経済では，期首に証券を取引できるが，期末には証券から得られる所得に課税（資本所得税）がなされる。証券配当に対する税率は，期末に実現する状態によって変えることができるものとする。これは，好況・不況によって減税があったり増税があったりすることに対応していると解釈できる。政府は税収を用いて公共財を生産し，供給する。証券は，状態に依存して購買力が引き渡されるような証券で，ある個人が発行したものを，他の個人が購入するようになっているので,「純供給量＝ゼロ」が均衡条件である。また，期末には財市場が開かれる。個人は，期末の状態に依存した初期賦存と課税後の証券配当を元手に財市場で取引を行う。

租税がない時の不完備市場のモデル設定は，Geanakoplos and Polemarchakis(1986), Werner(1985) などによって与えられ，均衡の存在も示されている。本稿でも，本稿の課税均衡の存在証明は基本的な方法を Geanakoplos and Polemarchakis(1986) に依っている。しかし，租税の導入のためにいくつかの問題が生じる。予算制約集合の凸性，無裁定条件の拡張，そして，政府の予算制約の成立などである。これらの問題の本質は，課税が資本の保有者（証券を買い持ちする者）になされ，資本の借り手（売り持ちの者）には課税されないという非対称な特徴にある。これらの問題は，清水 (2002) において肯定的に解決されている。本稿では，既に冒頭で述べたように政府の活動をより具体化すべく，公共財の供給を導入している。

清水 (2002) では，比較的低い税率のもとで均衡が存在することが証明された。一方，本稿では，ほとんどどのような税率のもとでも均衡が存在することを証明した。これは本稿のモデル化の大きな利点の一つであると考えられる。ほとんどの税率に対して均衡が存在する直観的な理由は，次のように考えられる。税収を一括移転の形で個人に移転する場合，個人がいくらでも大きな移転を予想してしまう状況を排除することが難しいためである[4]。一方，本稿のように政府が税収で公共財を供給する場合，そのような状況が起こらないため，ほとんど全ての税率の下で均衡の存在が証明できる。

資本所得税は資本収入 (本稿においてはペイオフ) からその取得原価を差し引いたものに一定の率で課されるという形式が自然かもしれない。しかし，本稿ではペイオフに対して定率の税が課されるものとする。この設定は租税の非対称性という特性を有し，同時に，資本の所有者を資本所得の発生者とそれ以外に分けるという表現上の煩雑さをさけるための工夫ともなっている。さらに，本稿で想定している租税は，株式取引におけるキャピタルゲイン課税における源泉分離課税（譲渡価格の 1.05 %）のような現実の制度に対応している。本稿で想定する課税制度も不自然というわけではないであろう。

[3] Arrow(1964),Debreu(1959)

[4] もちろん，清水 (2002) では，低い税率のもとで均衡の存在が証明されているというだけで，証明を工夫すれば，より広い税率の下で均衡の存在が証明できるという可能性は残されている。

2　モデル

標準的な1期間 (期首・期末) の不完備市場に，資本所得税制および公共財供給を付加したモデルを考察する。

経済には不確実性が存在し，それは期末に実現する S 個の自然の状態 (state of nature) $s \in S := \{1, ...S\}$ [5]によって表されるものとする。物理的な属性の異なる私的財は L 種類存在し，$\ell \in L := \{1, ..., L\}$ で表す。物理的な属性が同一の私的財であっても，異なる状態で利用可能ならば異なる財と考えることにする。ある状態 s における財 ℓ を $\ell(s)$ で表す。私的財は期末に開かれる財市場で取り引きされる。各状態ごとに異なる市場が開かれる。財価格を，$p := (p_1, ..., p_S) \in \mathbb{R}_+^{SL}$，$p_s := (p_{s1}, ..., p_{sL}) \in \mathbb{R}_+^L$ で表す。また，経済には証券が A 種類存在し，第 a 証券の量を $y_a \in \mathbb{R}$，$a \in A := \{1, ..., A\}$ で表す（ $y_a \geq 0$ ならば買い持ち (long position) を，$y_a \leq 0$ ならば売り持ち (short position) を表わす。)。以下では断らない限り $A < S$ と仮定する。各証券は期末に実現する状態に依存して，その保有者に r_{sa} 単位の $1(s)$ 財（状態 s における基準財）を引き渡すことを約束する。存在する証券のペイオフをまとめたペイオフ行列 R を，$S \times A$ 行列

$$R := \begin{bmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1A} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{S1} & \cdots & r_{SA} \end{bmatrix}$$

で表す。r_s で第 s 行を表す。証券は期首に不確実性が解消する前に証券市場で取り引きされ，証券価格を $q \in \mathbb{R}^A$ で表す。$\mathrm{rank}R = S$ の時に市場は完備であるといい，$\mathrm{rank}R < S$ の時に不完備であるという。$A < S$ のとき市場はもちろん不完備である。証券の純供給量はゼロであるとする。

次に，資本所得税制と公共財を導入する。政府は，証券からのペイオフに状態ごとに特定された定率税を課税する。ただし，各状態では，いずれの証券も同一の税率を課されている。ある状態における税収は，その状態における公共財の供給に用いられる。

$t := (t_1, ..., t_S), 0 < t_s < 1$ によって各状態における税率を表わし，$G := (G_1, ..., G_S)$ によって，各状態での公共財供給を表わす。等量消費の性質より，全ての個人が $G := (G_1, ..., G_S)$ だけの公共財を等しく消費できる。また，簡単のため，1単位のニュメレールから1単位の公共財が生産されるものと仮定する。課税後のペイオフ行列を，

$$\bar{R} := \begin{bmatrix} 1 - t_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 - t_S \end{bmatrix} R$$

で定義する。$\bar{r}_s$ で第 s 行を表す。

消費者は H 人存在し，$h \in H := \{1, ..., H\}$ で表す。各消費者は消費集合 $\mathbb{R}_+^{S(L+1)}$ 上の効用関数 $U^h : \mathbb{R}_+^{S(L+1)} \to \mathbb{R}$ と私的財の賦存 $e^h \in \mathbb{R}_+^{SL}$ で特徴づけられる。私的財の消費

[5]記号の節約のために，集合の最大元とその集合を同じ記号で表わす。

計画を $x^h := (x_1^h, ..., x_S^h) \in \mathbb{R}_+^{SL}$ で表す。ポートフォリオを $y^h := (y_1^h, ..., y_A^h) \in \mathbb{R}^A$ で表す。また，$\mathbf{e} := (e^1, ..., e^H)$ ，$\mathbf{x} := (x^1, ..., x^H)$ ，$\mathbf{y} := (y^1, ..., y^H)$ ，$\mathbf{U} := (U^1, ..., U^H)$ ，とする。

情報の非対称性と取引コストがなく，財と証券の完全分割可能性を仮定する。また，

$$y_{+a}^h := \max(y_a^h, 0) \qquad y_{-a}^h := \min(y_a^h, 0)$$
$$y_+^h := (y_{+1}^h, ..., y_{+A}^h) \qquad y_-^h := (y_{-1}^h, ..., y_{-A}^h)$$

と定義すると，$y^h = y_+^h + y_-^h$ である。$y_+^h \geq 0$ [6]は買い持ち (long position) を，$y_-^h \leq 0$ は売り持ち (short position) を表わしている。ここで，効用関数，賦存，ペイオフ行列に関して次を仮定する。

(A1) 全ての $h \in H$ について，U^h は連続かつ準凹である。
(A2) $e^h \in \mathbb{R}_{++}^{SL}$, $\forall h \in H$
(A3) U^h は定義域の内点において私的財に関して狭義単調増加関数である。つまり，$(x, G) > (\tilde{x}, G) \gg 0$ ならば $U^h(x, G) > U^h(\tilde{x}, G)$ である。
(A4) $\{(x', G') \in \mathbb{R}_+^{S(L+1)} | U^h(x', G') \geq U^h(x, G)\} \subset \mathbb{R}_{++}^{S(L+1)}$, $\forall (x, G) \in \mathbb{R}_{++}^{SL}$
(A5) $r_s \geq 0$, $\forall s \in S$
(A6) $\mathrm{rank} R = A < S$

$R := \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix}$ とすると，A6 より一般性を失うことなく R_1 は フルランクの $A \times A$ 行列と仮定してよい。

個人の予算制約は

$$p_s \cdot (x_s^h - e_s^h) \leq p_{s1}\{(1 - t_s) r_s \cdot y_+^h + r_s \cdot y_-^h\}, \ \forall s \in S \tag{1}$$
$$q \cdot y^h = 0 \tag{2}$$

である。また，予算集合を

$$B(e^h, p, q) := \{(x^h, y^h) \in \mathbb{R}^{SL} \times \mathbb{R}^A | (x^h, y^h) \text{ は (1)(2) をみたす}\}$$

であらわす。各個人は，予算制約の下で効用最大化を行う。政府の予算制約は

$$t_s \sum_{h \in H} r_s \cdot y_+^h = G_s, \ \forall s \in S$$

である。次に，裁定を定義する。裁定とは直観的には，無から有を生むようなポートフォリオである。裁定が存在しないことと，p, q, G を所与としたときに個人の効用最大化問題に解が存在することは同値である事がよく知られている[7] 。この事実は補題 2 を通じて均衡の存在を保証するために用いられる。

[6]ベクトル $x = (x_i), y = (y_i)$ の間の不等号は，$x \geq y$ により $x_i \geq y_i, \forall i$ を表わし，$x > y$ により $x \geq y$ かつ $x \neq y$ を表わし，$x \gg y$ により $x_i > y_i, \forall i$ を表わす。

[7]Magill and Shafer(1991) p.1534 l.10-12

定義 1　裁定 (arbitrage) とは，ポートフォリオ y で

$$\bar{R}y_+ + Ry_- > 0 \text{ かつ } q \cdot y \leq 0$$

をみたすものをいう。ある証券価格 q に対して裁定 y が存在しないとき q を無裁定価格と呼ぶ。

個人の縮約需要対応 (truncated demand correspondence) を

$$d^h(e^h, t, p, q, G; K) := \arg\max_{x^h, y^h} \{U^h(x^h) | (x, y) \in B(e^h, p, q) \cap K\}$$

によって定義する。ここで，$K := [-k, k]^{SL+A}$ は一辺が $2k$ の立方体である。$d^h_x(e^h, t, p, q, G; K)$, $d^h_y(e^h, t, p, q, G; K)$ を，それぞれ財と証券の需要関数とする。つまり，$d^h_x(\cdot)$, $d^h_y(\cdot)$ はそれぞれ $d^h(e^h, t, p, q, G; K)$ を財空間及び証券の空間に射影したものである。

補題 1　[8]A1-A4 がみたされているとき，$d^h(e^h, t, p, q, G; K)$ は $p \gg 0, q > 0$ に関して非空，コンパクト値，凸値, 上半連続である。

縮約総需要対応を

$$d(\mathbf{e}, t, p, q, G; K) := (d_x(\mathbf{e}, t, p, q, G; K), d_y(\mathbf{e}, t, p, q, G; K))$$

$$d_x(\mathbf{e}, t, p, q, G; K) := \min\left(\sum_{h \in H} x^h_{sl},\ k\right)_{s \in S, l \in L}, \quad \text{where } x^h \in d^h_x(\cdot)$$

$$d_y(\mathbf{e}, t, p, q, G; K) := \min\left(|\sum_{h \in H} y^h_a|,\ k\right)_{a \in A}, \quad \text{where } y^h \in d^h_y(\cdot)$$

で定義すると，補題 1 より $d(\cdot)$ は $p \gg 0, q > 0, G \geq 0$ に関して非空，コンパクト値，凸値, 上半連続である。

次に，無裁定価格の特徴づけを行う。その際，ペイオフ行列のランクが問題となるが，個人の予算制約から分かるように，個人の直面するペイオフ行列は，保有するポートフォリオによって変わる。つまり，$y \in \mathbb{R}^A$ をひとつ固定したとき

$$A_+ := \{a \in A | y_a \geq 0\}, \quad A_- := A \setminus A_+$$

とし，I_{A_+} (I_{A_-}) を $A \times A$ の対角行列で，対角成分のうち $a \in A_+$ ($a \in A_-$) の成分が 1，他は 0 である行列とすると，ポートフォリオ y を選んだ個人の直面するペイオフ行列は $\bar{R}I_{A_+} + RI_{A_-}$ と定義できる。ところで，R は A5 よりフルランクであるが，$\bar{R}I_{A_+} + RI_{A_-}$ は t によってはフルランクとはならない。しかし，

$$\mathcal{T} := \{t \in (0,1)^S | \text{ 任意の } A_+ \subset A \text{ に対して} \bar{R}I_{A_+} + RI_{A_-} \text{がフルランクになる} \}$$

とおくと，$\mathcal{T}$ は $(0,1)^S$ において生成的である[9]。ところで，$G' \subset G$ が G の相対位相で稠

[8]清水 (2002) 補題 1 と同様に証明できる。
[9]清水 (2002) 補題 2

密な開集合であるとき，G' を生成的 (generic) な集合という。ある性質が生成的な集合の全ての点で成り立つとき，その性質は生成的に成り立つという。つまり，生成的に成り立つというのは，成り立たないことが非常に稀で，一般に成り立つと考えても分析上一般性を失わないというような意味合いを持つ。以上の議論から，税率を $\mathcal{T}$ に限ってもほとんど一般性を失わないことが分かった。以上の準備のもとで，無裁定価格の特徴づけを行おう。

補題 2 [10] A5,A6 を仮定する。

$$C := \{q \in \mathbb{R}^A | v^T \bar{R} \leq q \leq v^T R, \exists v \in \mathbb{R}^S_+\}^{11}$$

と定義する。このとき，税率 t が $\mathcal{T}$ に属すならば，C は閉凸錐で，int$C$ は非空かつ無裁定価格のみからなり，$q \notin \mathrm{int}C$ ならば，q に対して裁定が存在する。

定義 2 経済 $(\mathbf{U}, \mathbf{e}, t)$ の均衡とは，価格と配分と公共財供給の組 $(p, q, \mathbf{x}, \mathbf{y}, G)$ で，次の条件をみたすものとする。
(i) 全ての消費者 $h \in H$ に対して，(p, q, G) を所与として (x^h, y^h) が予算制約の下で U^h の最大元になる。
(ii)

$$\sum_{h \in H} e^h = \sum_{h \in H} x^h + g, \ \sum_{h \in H} y^h = 0 \tag{3}$$

ここで $g := (g_1, ..., g_S)$，$g_s := (0, ..., 0, G_s)$
(iii) 政府の予算制約がみたされている。

上の定義で $t = 0$ とすると，GP(1986) における不完備市場均衡 (GEI) に戻る。経済 $(\mathbf{U}, \mathbf{e})$ に対する GEI 均衡 $(p, q, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ を，経済 $(\mathbf{U}, \mathbf{e}, t = 0, G = 0)$ の均衡に対応する GEI 均衡と呼ぶことにしよう。ここで，経済 $(\mathbf{U}, \mathbf{e})$ とは，賦存の組が $\mathbf{e}$ になり，効用の組が $\mathbf{U}$ となるような H 人の消費者からなる経済である。つまり，本稿のモデルは，標準的な不完備市場モデルの自然な拡張になっている。

定理 A1-A6 を仮定する。このとき任意の $t \in \mathcal{T}$ に対して $p \gg 0$ をみたす均衡が存在する。
(証明)
立方体 $K := [-k, k]^{SL+A}$ を考える。ここで，$k > \sum_{h \in H} \|e^h\|$ とする。

$$\Delta^{N-1} := \{\delta \in \mathbb{R}^N_+ | \Sigma_{n=1}^N \delta_n = 1\}$$
$$Q := C \cap \Delta^{A-1}$$

[10] 清水 (2002) 補題 3
[11] 肩つきの T は転置を表わす。

と定義する。財と証券の価格の集合をそれぞれ $(\Delta^{(L-1)})^S$ ，Q に限っても一般性を失わない。不動点対応

$$\Phi^K : (\Delta^{L-1})^S \times Q \times K \times [0,\Xi]^S \to (\Delta^{L-1})^S \times Q \times K \times [0,\Xi]^S$$
$$\Phi^K(p,q,(x,y),\mathbf{T}) := (\Phi_1 \times \Phi_2 \times \Phi_3^K \times \Phi_4)(p,q,(x,y),\mathbf{T})$$

を,

$$\Phi_1(p,q,x,y,G) := \mathrm{argmax}_{\bar{q}\in Q}\bar{q}\cdot y$$
$$\Phi_2(p,q,x,y,G) := \prod_{s\in S}\mathrm{argmax}_{\bar{p}_s\in\Delta^{L-1}}\bar{p}_s\cdot(x_s-e_s)$$
$$\Phi_3^K(p,q,x,y,G) := d(\mathbf{e},t,p,q,G;K)-(\Sigma_h e^h,0)$$
$$\Phi_4(p,q,x,y,G) := (I_s)_{s\in S},\ \text{ where } I_s := t_s r_s\cdot(\Sigma_h y_+^h) \le \Xi := r_{\max}kAH$$

のようにつくる。ここで, $r_{\max}$ は R の最大要素, $e_s := \sum_{h\in H} e_s^h$ とする。また y は $\sum_{h\in H} y^h$ ，x_s は $\sum_{h\in H} x_s^h$ と意図されている。不動点定理より，ある $(p^*,q^*,x^*,y^*,G^*) \in (\Delta^{L-1})^S \times Q \times K \times [0,\Xi]^{SH}$ で

$$(p^*,q^*,x^*,y^*,G^*) \in \Phi^K(p^*,q^*,x^*,y^*,G^*)$$

をみたすものがある。

$\bar{R}y_+^* + Ry_-^* \le 0$ を示す。いま，$\bar{R}y_+^* + Ry_-^* > 0$ としてみる。このときある s が存在して $\bar{r}_s\cdot y^* \ge \bar{r}_s\cdot y_+^* + r_s\cdot y_-^* > 0$ となっている。その s を固定しておく。$\bar{v}$ を s 番目の要素が 1，他の要素は 0 である S 次元ベクトルとすると，$\bar{v}^T\bar{R} = \bar{r}_s \in C$ である。$q^* \in C$ で C は凸錐なので $q^* + \bar{r}_s \in C$ である。よって，ある $\lambda > 0$ が存在して，$\lambda(q^* + \bar{r}_s) \in Q$ をみたすようにできる。$q^*\cdot y^{h*} = 0,\ \forall h \in H$ より $q^*\cdot y^* = 0$ なので，$q := \lambda(q^* + \bar{r}_s)$ とすると $q\cdot y^* = \lambda(q^* + \bar{r}_s)\cdot y^* = \lambda\bar{r}_s\cdot y^* > 0$ である。これは Φ_1 の作り方から，$q^*\cdot y^* = 0$ の極大性に反する。

次に $y^* = 0$ を示す。$y^* \ne 0$ とすると，$\bar{R}I_{A_+} + RI_{A_-}$ がフルランクであることから，$\bar{R}y_+^* + Ry_-^* < 0$ となる。よって，$\bar{R}(-y_+^*) + R(-y_-^*) > 0,\ q^*\cdot(-y^*) = 0$ である。このとき，$-y^*$ は裁定なので，個人 h は $y^h := y^{h*} + (-y^*)$ を選ぶと y^h は予算制約をみたし y^{h*} を選ぶより高い効用を得られる。これは (x^{h*}, y^{h*}) の最適性に反する。

ワルラス法則より $p_s^*\cdot(x_s^* - e_s + g_s^*) \le 0,\ \ \forall s \in S$ である。また，$p^* \in \Phi_2(p^*,q^*,x^*,y^*,G^*)$ より，$p_s\cdot(x_s^* - e_s + g_s^*) \le p_s^*\cdot(x_s^* - e_s + g_s^*),\ \forall p_s \in\Delta^{L-1}$ である。よって，$x_s^* - e_s + g_s^* \le 0$ である。$x^h \ge 0$,$g_s \ge 0$ かつ $x_s^* - e_s + g_s^* = \Sigma_h(x_s^{h*} - e^h) + g_s^*$ なので $x^{h*} \le \Sigma_i e^i$ である。よって

$$\|x^{h*}\| \le \|\Sigma_{i\in H}e^i\|,\ \ \forall h \in H \tag{$*$}$$

次に，$k_n(\ k_n \to \infty)$ である立方体 $K_n := [-k_n, k_n]^{SL+A}$ の列を考える。各 n に対して Φ^{K_n} の不動点 $(p_n^*, q_n^*, x_n^*, y_n^*, G_n^*)$ が存在する。x_n^{h*} は $(*)$ よりコンパクトな集合に属し，p_n^*, q_n^* もコンパクトな集合に属すので，それぞれ収束部分列をとることができる。それを，

$$p_n^* \to p^*, q_n^* \to q^*, x_n^* \to x^*$$

とする。

次に，$p^* \gg 0$ を示す。A4 より，$x^{h*} \gg 0$ であることに注意しておく。いま，ある $\ell(s)$ について $p_{s\ell}^* = 0$ とし，$(p_{s\ell}^*)_n \to p_{s\ell}^*$ となったとする。$\mathbf{1}_{s\ell} \in \mathbb{R}^{SL}$ を $\ell(s)$ 方向への単位ベクトルとする。$b := \min_{\ell \in L, s \in S} e_{s\ell}^h$ と定義する。A3 より，

$$U^h(x^{h*} + b\mathbf{1}_{s\ell}, G^*) > U^h(x^{h*}, G^*)$$

である。また，効用関数の連続性と，$(p_{s\ell}^*)_n \to 0$ より十分大きい n について，

$$U^h((1-(p_{s\ell}^*)_n)x_n^{h*} + b\mathbf{1}_{s\ell}, G^*) > U^h(x_n^{h*}, G^*)$$

が成り立つ。また，$(p_s^*)_n \cdot (x_s^{h*})_n = (p_s^*)_n \cdot e_s^h \geq (p_s^*)_n \cdot \mathbf{b}$ ，ここで $\mathbf{b} := (b, ..., b) \in \mathbb{R}^L$ なので，

$$((1-(p_{s\ell}^*)_n)x_n^{h*} + b\mathbf{1}_{s\ell}, (1-(p_{s\ell}^*)_n)y_n^{h*}) \in B(e^h, p^*, q^*) \cap K_n$$

である。これは，

$$(x_n^{h*}, y_n^{h*}) \in d^h(p_n^*, q_n^*, G_n^*; K_n)$$

に反する。よって，$p^* \gg 0$ である。

$p_{s1}^* \gg 0, R$ はフルランクを持ち，かつ $x_n^{h*} \to x^{h*}$ なので

$$\frac{1}{p_{s1}^*} p_s^* \cdot (x_s^{h*} - e_s^h)) \leq (1-t_s) r_s \cdot y_+^{h*} + r_s \cdot y_-^{h*}$$

は一意な解 $y^{h*} = \lim_{n \to \infty} y_n^{h*}$ をもつ。

十分大きな n について，$(x^{h*}, y^{h*}) \in \mathrm{int}K_n$ である。U^h の連続性と凸性から，(x^{h*}, y^{h*}) は (p^*, q^*, T^{h*}) を所与としたときの予算制約式のもとでの最大元である。連続性より $y^* = 0$ かつ $x_s^* - e_s^* + g_s^* \leq 0,\ \forall s \in S$ である。よって $p^* \gg 0$ より $x_s^* + g_s^* = e_s,\ \forall s \in S$ である。よって，$(p^*, q^*, x^*, y^*, G^*)$ は均衡であることが証明された。（証明終り）

3 おわりに

本稿では，不完備市場モデルに資本所得税および公共財を導入したモデルの均衡の存在を証明した。これによって，租税や公共財供給といった政府の活動が存在する状況下での，資源配分や資産価格に関して整合的に分析を行う基礎を固めることが出来た。ただし，資源配分の効率性や，政府の活動と資産価格の関係については今後の研究課題としたい。

参考文献

[1] Aiyagari, (1995) Optimal income taxation with incomplete markets, borrowing constraints, and constant discounting. *Journal of Political economy*103. 1158-1175.

[2] Arrow, (1964) The role of securities in the optimal allocation of risk bearing. *R.E.S.*31. 91-96.

[3] Diamond and Mirrlees,(1992) Optimal taxation of identical consumers when markets are incomplete. Desgupta.et.al (eds.) *Economics analysis of markets and games: Essay in Honor of Frank Hahn.* MIT Press.

[4] Debreu, (1959) *Theory of Value.* Yale U.P.

[5] Duffie, (1991) Theory of valuation. IN: Hildenbrand and Sonnenschein(eds.) *Handbook of mathematical economics,* Vol.4. North- Holland.

[6] Duffie, (1996) *Dynamic Asset Pricing Theory.* Princeton U.P.

[7] DeMarzo,(1988) An extension of the Modigliani-Miller theorem to stochastic economies with incomplete markets and interdependent securities. *J.E.T.45.* 353-369.

[8] Geanakoplos,(1990) An introduction to general equilibrium with incomplete asset markets. *J.Math.e.19.* 1-38.

[9] Geanakoplos and Polemarchakis, (1986) Existence,regularity,and constrained suboptimality of competitive allocation when asset structure is incomplete. IN: Heller, Starr, Starrett (eds.) *Uncertainty, information and communication: Essay in honor of K.Arrow,* Vol.3. Cambridge U.P.

[10] Hart,(1975) On the optimarity of equilibrium when the market structure is incomplete. *J.E.T.11.* 418-443.

[11] Magill and Quinzii, (1996) *Theory of Incomplete Market.* Vol.1. MIT.U.P.

[12] Magill and Shafer, (1991) Incomplete market. IN: Hildenbrand and Sonnenschein(eds.) *Handbook of mathematical economics,* Vol.4. North- Holland.

[13] Guillemin and Pollack, (1974) *Differential topology.* Prentice-Hall.

[14] Radner, (1972) Existence of equilibrium of plan, prices and price expectations. *Ecomonetrica* 40. 289-303.

[15] 清水, (2002) 「課税均衡の存在:不完備市場モデルへの資本所得税の導入」, Discussion Paper Series 2002/9 神戸大学大学院経営学研究科

[16] Werner, (1985) Equilibrium in economies with incomplete markets. *J.E.T.* 36.110-119.